Bases Fundamentales de sistemas tridimensionales

Sea la ecuación lineal $X'(t) = A\,X(t)$ con $A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ y $X(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))^T$, se tienen los siguientes casos según los autovalores de A:

1 Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, entonces una base fundamental del sistema está formada por

$$\begin{array}{ll} X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1 \in \ker(A - \lambda_1 I), \\ X_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_2 \in \ker(A - \lambda_2 I), \\ X_3(t) = e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3, & \mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda_3 I). \end{array}$$

2 Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ siendo λ_1 autovalor simple y λ_2 autovalor doble, entonces tendremos las siguientes posibilidades

2.1 Si $\dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = 2$, entonces una base fundamental será

$$\begin{array}{ll} X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1 \in \ker(A - \lambda_1 I), \\ X_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, & \multirow{2}{*}{$\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda_2 I)$ l.i.} \\ X_3(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_3, & \end{array}$$

2.2 Si $\dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = 1$, entonces una base fundamental será

$$\begin{array}{ll} X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1 \in \ker(A - \lambda_1 I), \\ X_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_2 \in \ker(A - \lambda_2 I), \\ X_3(t) = e^{\lambda_2 t}(I + (A - \lambda_2 I)t)\mathbf{v}_3, & \mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda_2 I)^2 \setminus \ker(A - \lambda_2 I). \end{array}$$

Teniendo en cuenta que si $\mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda_2 I)^2 \setminus \ker(A - \lambda_2 I)$ entonces $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda_2 I)$ y es un vector no nulo, así podemos escribir:

$$\begin{array}{ll} X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_1 \in \ker(A - \lambda_1 I), \\ X_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda_2 I)^2 \setminus \ker(A - \lambda_2 I) \\ X_3(t) = e^{\lambda_2 t}(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2) & \mathbf{v}_2 = (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_3. \end{array}$$

3 Si $\sigma(A) = \{\lambda\}$, luego λ sería un autovalor triple, se tienen los siguientes casos:

3.1 Cuando $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 3$, es decir $\ker(A - \lambda I) = \mathbb{R}^3$, una base fundamental estaría formada por

$$\begin{array}{ll} X_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, & \\ X_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \text{ l.i.} \\ X_3(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_3, & \end{array}$$

3.2 Cuando $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 2$ podemos tomar como base fundamental

$$\begin{array}{ll} X_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, & \\ X_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2, & \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker(A - \lambda I) \text{ l.i.} \\ X_3(t) = e^{\lambda t}(I + (A - \lambda I)t)\mathbf{v}_3, & \mathbf{v}_3 \in \ker(A - \lambda I)^2 \setminus \ker(A - \lambda I) \end{array}$$

Haciendo la misma observación que en el Caso 2.2, también podemos escribir la base fundamental:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v}_2, \\ X_3(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{v}_3 \in \ker(A-\lambda I)^2 \setminus \ker(A-\lambda I)$, $\mathbf{v}_2 = (A-\lambda I)\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_1 \in \ker(A-\lambda I)$ linealmente independiente con $\mathbf{v}_2$.

3.3 Si $\dim(\ker(A-\lambda I)) = 1$, entonces $\dim\left(\ker(A-\lambda I)^2\right) = 2$ y $\ker(A-\lambda I)^3 = I\!R^3$. Una base fundamental vendría dada por las funciones

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}(I + (A-\lambda I)t)\mathbf{v}_2, \\ X_3(t) &= e^{\lambda t}(I + (A-\lambda I)t + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\mathbf{v}_3), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 \in \ker(A-\lambda I), \\ &\mathbf{v}_2 \in \ker(A-\lambda I)^2 \setminus \ker(A-\lambda I), \\ &\mathbf{v}_3 \in I\!R^3 \setminus \ker(A-\lambda I)^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si $\mathbf{v}_3 \in I\!R^3 \setminus \ker(A-\lambda I)^2$ se verifica que el vector $(A-\lambda I)\mathbf{v}_3 \in \ker(A-\lambda I)^2 \setminus \ker(A-\lambda I)$ y que el vector $(A-\lambda I)^2\mathbf{v}_3 \in \ker(A-\lambda I)$ y es no nulo, entonces podemos escribir la base fundamental como sigue:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1), \\ X_3(t) &= e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2 + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_1\right), \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{v}_3 \notin \ker(A-\lambda I)^2$, $\mathbf{v}_2 = (A-\lambda I)\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_1 = (A-\lambda I)^2\mathbf{v}_3$.

Matriz de Jordan

La matriz de Jordan en el caso de 3 autovalores simples es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

En el caso de un autovalor λ_1 simple y λ_2 doble las posibles matrices de Jordan son:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

En el caso de un autovalor triple λ las posibles matrices de Jordan son:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$